×I40×

ECOLE DE L'AIR

I977

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures - Coefficient : 9)

On considère l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$(1) \quad x \frac{dy}{dx} - y^2 - x = 0$$

I

1. - a) Chercher les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0, sous la forme $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On recherchera une formule de récurrence permettant de calculer a_n en fonction des a_p $(p \leqslant n - 1)$.

b) Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière, notée y_o et que son rayon de convergence est non nul (on montrera que : $\forall\ n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n}$).

2. - On effectue le changement de fonction inconnue $y = -\frac{x}{z} \frac{dz}{dx}$.

a) Vérifier que l'équation différentielle satisfaite par la fonction z est :

$$(2) \quad xz'' + z' + z = 0$$

b) Chercher les solutions de (2) développables en série entière au voisinage de 0 , sous la forme $z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ et déterminer leur rayon de convergence (on explicitera b_n en fonction de b_o) .

c) Déterminer parmi les solutions de (2) développables en série entière au voisinage de 0 , la solution z_o telle que $z_o(0) = 1$. Montrer que $z_o(x) > 0$ si $x < 0$ et que z_o est non nulle au voisinage de 0.

d) En admettant que si S est une série entière au voisinage de 0 de rayon de convergence non nul, telle que $S(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et a un rayon de convergence non nul, donner l'expression de y_o comme quotient de deux séries entières; quel est son signe pour $x < 0$?

II

On effectue le changement de fonction inconnue $y(x) = y_o(x) + \frac{1}{w(x)}$.

1. - a) Vérifier que l'équation différentielle satisfaite par la fonction w est :

$$(3) \quad xw' + 2\,y_o w + 1 = 0$$

b) Résoudre (3) en utilisant la fonction z_o^2 et en déduire la forme générale des solutions de (1) lorsque x appartient à $]-\infty\ ,\ 0[$.

c) Montrer que par tout point $(x,\ y)$ tel que $x < 0$ passe une et une seule courbe intégrale de (1).

2. - Montrer que lorsque x tend vers 0 en restant négatif, toutes les solutions de (1) tendent vers 0 .

III

On se place sur $]-\infty\ ,\ 0[$ et on appelle point d'inflexion d'une courbe (Γ) donnée par une équation $y = f(x)$, f deux fois dérivable, un point $(x,\ f(x))$ où $f''(x) = 0$.

1. - a) Déterminer dans un repère orthonormé le lieu (L_1) des points où les courbes intégrales de l'équation (1) ont une tangente parallèle à Ox , et le lieu (L_2) des points d'inflexion de ces courbes ; tracer ces deux lieux en précisant les tangentes en 0 (origine).

b) Dans chacune des six régions du demi-plan ensemble des points d'abscisse négative délimitées par (L_1) et (L_2) , déterminer le signe de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, où y est solution de (1).

2. - a) Calculer $\frac{dy_o}{dx}(0)$ et $\frac{d^2y_o}{dx^2}(0)$ et préciser la région, parmi les six régions délimitées par (L_1) et (L_2) où est situé $(x,\ y_o(x))$ lorsque x demeure dans un voisinage à gauche de 0 .

b) Montrer que $(x,\ y_o(x))$ demeure dans la région déterminée en a) pour tout $x < 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).

3. - a) Montrer que $\frac{dy_o}{dx}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

b) Calculer la limite de $\frac{y_o(x)}{\sqrt{-x}}$ lorsque x tend vers $-\infty$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail